The dimensional reduction and scalar curvature

@john1851

April 3, 2023

Dimensional reduction した時の scalar curvature の式が全然文献に載っていない！ので自分で確認する。

Contents

1 Spin connection

$d+1$ 次元の計量 $\hat{g}$ を考える。 $d+1$ 次元目の座標を z として、計量を次のように書く。*[1]

$$\hat{g}_{MN}\,\mathrm{d}x^M\,\mathrm{d}x^N = \mathrm{e}^{2\alpha\phi}g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu + \mathrm{e}^{2\beta\phi}(\mathrm{d}z + A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu)^2. \tag{1}$$

M, N は $d+1$ 次元の添字、 μ, ν は d 次元の添字である。 α, β は後で調整する任意の定数。非対角成分と対応する 1-form は $A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu = A$ とも書ける。重要な点として、 A, ϕ そして g は x^μ にだけ依存していて z には依存していない。（z が compact かどうかは気にしない。）計量を行列で書くと

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\alpha\phi}g_{\mu\nu} + \mathrm{e}^{2\beta\phi}A_\mu A_\nu & e^{2\beta\phi}A_\mu \\ \mathrm{e}^{2\beta\phi}A_\nu & \mathrm{e}^{2\beta\phi} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

よって $\hat{g}_{zz} = \mathrm{e}^{2\beta\phi}$, $\hat{g}_{\mu z} = \mathrm{e}^{2\beta\phi}A_\mu$ と対応がつく。

$d+1$ 次元での vielbein basis $\hat{e}^A$ を考える。 $A, B, \cdots$ を $d+1$ 次元での locally flat coordinates の添字とする。*[2] それぞれ、次で書くことができる。

$$\hat{e}^a = \mathrm{e}^{\alpha\phi}e^a, \quad \hat{e}^z = \mathrm{e}^{\beta\phi}(\mathrm{d}z + A), \tag{3}$$

*[1] vielbein と非常に紛らわしくなるので自然対数の底はローマン体にしておく。

*[2] 添字に具体的な座標を指定すると、$A = z$, $M = z$ などとなって区別がつかなってしまう。それで困る場合には $A = \bar{z}$ or $\underline{z}$ などと書いて区別がつくようにする場合もあるが、ここでは特に困らないのでそのまま書く。

ここで、 e^a は $g_{\mu\nu}$ の vielbein basis すなわち

$$g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = \eta_{ab}e^a e^b, \tag{4}$$

を満たす 1-form である。また、 $a, b, \cdots$ を $\mu, \nu, \cdots$ に対応する d 次元の locally flat coordinates の添字とする。これらを使うと実際、$d+1$ 次元計量は次のように書ける。

$$\hat{g}_{MN}\,\mathrm{d}x^M\,\mathrm{d}x^N = \eta_{AB}\hat{e}^A\hat{e}^B = \eta_{ab}\hat{e}^a\hat{e}^b + \hat{e}^z\hat{e}^z. \tag{5}$$

vielbein basis の外微分をとる。

$$\mathrm{d}\hat{e}^a = \mathrm{d}\mathrm{e}^{\alpha\phi} \wedge e^a + \mathrm{e}^{\alpha\phi}\,\mathrm{d}e^a\,, \tag{6}$$

$$\mathrm{d}\hat{e}^z = \mathrm{d}\mathrm{e}^{\beta\phi} \wedge (\mathrm{d}z + A) + \mathrm{e}^{\beta\phi}F. \tag{7}$$

ここで、 $\mathrm{d}A = F$ と書いた。 torsion free ($\mathcal{T}^a = 0$) として、 first Cartan structure equation (60) から、spin connection 1-form $\hat{\omega}^A{}_B$ を読みとることができる。

$$\mathrm{d}\hat{e}^A = -\hat{\omega}^A{}_B \wedge \hat{e}^B. \tag{8}$$

そのために、(6) (7) の右辺を $\hat{e}^M$ で書き直す。まず、(6) は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\hat{e}^a =& \alpha\mathrm{e}^{\alpha\phi}\phi_{,b}e^b \wedge e^a - \mathrm{e}^{\alpha\phi}\omega^a{}_b \wedge e^b \\ =& \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\phi}\phi_{,b}\hat{e}^b \wedge \hat{e}^a - \omega^a{}_b \wedge \hat{e}^b\end{aligned} \tag{9}$$

第一項目は外微分を評価した。[*3] 第二項目に対しては (60) を使い、$g_{\mu\nu}$ に対する spin connection $\omega^a{}_b$ に書き換えた。二行目でハット付きの基底に直した。次に、(7) は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\hat{e}^z =& \beta\mathrm{e}^{\beta\phi}\phi_{,b}e^b \wedge (\mathrm{d}z + A) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\beta\phi}F_{ab}e^a \wedge e^b \\ =& \beta\mathrm{e}^{-\alpha\phi}\phi_{,b}\hat{e}^b \wedge \hat{e}^z + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\beta-2\alpha)\phi}F_{ab}\hat{e}^a \wedge \hat{e}^b.\end{aligned} \tag{10}$$

一行目で成分に直し、二行目でハット付きの基底に直した。まとめると、

$$\mathrm{d}\hat{e}^a = -\hat{\omega}^{ab}\hat{e}_b - \hat{\omega}^{az}\hat{e}_z = \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\phi}\phi_{,b}\hat{e}^b \wedge \hat{e}^a - \omega^a{}_b \wedge \hat{e}^b, \tag{11}$$

$$\mathrm{d}\hat{e}^z = -\hat{\omega}^{zb}\hat{e}_b = \beta\mathrm{e}^{-\alpha\phi}\phi_{,b}\hat{e}^b \wedge \hat{e}^z + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\beta-2\alpha)\phi}F_{ab}\hat{e}^a \wedge \hat{e}^b. \tag{12}$$

$\hat{\omega}^{AB}$ の反対称性により $\hat{\omega}^{zz} = 0$ なので、 (12) から次が求まる。

$$\hat{\omega}^{zb} = \beta\mathrm{e}^{-\alpha\phi}\phi^{,b}\hat{e}^z + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\beta-2\alpha)\phi}F^b{}_a\hat{e}^a \tag{13}$$

これを (12) に代入すると、

$$\begin{aligned}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\phi}\phi_{,b}\hat{e}^b \wedge \hat{e}^a - \omega^a{}_b \wedge \hat{e}^b =& -\hat{\omega}^{ab} \wedge \hat{e}_b + \left(\cancel{\beta\mathrm{e}^{-\alpha\phi}\phi^{,a}\hat{e}^z} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\beta-2\alpha)\phi}F^a{}_b\hat{e}^b\right) \wedge \hat{e}_z, \\ \hat{\omega}^{ab} \wedge \hat{e}_b =& \omega^{ab} \wedge \hat{e}_b + \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\phi}\phi^{,b}\hat{e}^a \wedge \hat{e}_b - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\beta-2\alpha)\phi}F^{ab}\hat{e}^z \wedge \hat{e}_b, \\ \hat{\omega}^{ab} \wedge \hat{e}_b =& \omega^{ab} \wedge \hat{e}_b + \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\phi}\left(\phi^{,b}\hat{e}^a - \phi^{,a}\hat{e}^b\right) \wedge \hat{e}_b - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\beta-2\alpha)\phi}F^{ab}\hat{e}^z \wedge \hat{e}_b,\end{aligned} \tag{14}$$

[*3] $\bullet_{,a} = \partial_a\bullet$. ここでは使わないが、 $\bullet_{;a} = \nabla_a\bullet$. また、 ∂_a は $e_a{}^\mu\partial_\mu$.

$\hat{e}^z \wedge \hat{e}^z$ の項は外積の性質より消える。また、三行目では ab の反対称性を復活させるために $\hat{e}^b \wedge \hat{e}_b = 0$ となる項を挿入した。よって、結果をまとめて書くと、

$$\hat{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + \alpha \mathrm{e}^{-\alpha\phi}\left(\phi^{,b}\hat{e}^a - \phi^{,a}\hat{e}^b\right) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\beta-2\alpha)\phi}F^{ab}\hat{e}^z, \tag{15}$$

$$\hat{\omega}^{za} = -\hat{\omega}^{az} = \beta\mathrm{e}^{-\alpha\phi}\phi^{,a}\hat{e}^z + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\beta-2\alpha)\phi}F^a{}_b\hat{e}^b. \tag{16}$$

connection 1-form が得られたので、原理的にはここから curvature 2-form を計算することができる。右辺を全てハットなしの量に書き直すと、

$$\hat{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + \alpha\left(\phi^{,b}e^a - \phi^{,a}e^b\right) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}F^{ab}(\mathrm{d}z + A), \tag{17a}$$

$$\hat{\omega}^{za} = -\hat{\omega}^{az} = \beta\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)\phi}\phi^{,a}(\mathrm{d}z + A) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)\phi}F^a{}_b e^b. \tag{17b}$$

2 Curvature

2.1 $\alpha = 0, \beta = 1$

個人的に知りたいのは $\alpha = 0, \beta = 1$ の場合。すなわち、計量は次の形をとる。

$$\hat{g}_{MN}\,\mathrm{d}x^M\,\mathrm{d}x^N = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu + \mathrm{e}^{2\phi}(\mathrm{d}z + A)^2. \tag{18}$$

[7] に答えらしきものがあるが、$d = 4$ に限定している。

$$\hat{R} = R - 2\mathrm{e}^{-\phi}\nabla^2\mathrm{e}^{\phi} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^{ab}F_{ab}. \tag{19}$$

これを確かめたい。混乱を減らすために connection の脚を混合テンソルの形にすると、(17) から

$$\hat{\omega}^a{}_b = \omega^a{}_b - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b e^z, \tag{20}$$

$$\hat{\omega}^z{}_a = \phi_{,a}e^z + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}F_{ab}e^b \tag{21}$$

$$\hat{\omega}^a{}_z = -\phi^{,a}e^z - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b e^b \tag{22}$$

ここで、 $e^z \equiv \mathrm{e}^{\phi}(\mathrm{d}z + A)$. こうすると、[7] にある式と一致する。また、$\hat{e}^a = e^a$ なので vielbein basis は $d+1$ 次元のものと同じになる。

まず、(20) の exterior derivative は

$$\mathrm{d}\hat{\omega}^a{}_b = \underline{\mathrm{d}\omega^a{}_b} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\right)_{,c} e^c \wedge e^z - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\,\mathrm{d}e^z\,. \tag{23}$$

ここで、最後の項について

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e^z =& \mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{\phi}(\mathrm{d}z + A)\right] = \phi_{,a}e^a \wedge e^z + \mathrm{e}^{\phi}F \\ =& \phi_{,a}e^a \wedge e^z + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}F_{ab}e^a \wedge e^b\end{aligned} \tag{24}$$

を使うと次のように書ける。

$$\mathrm{d}\hat{\omega}^a{}_b = \underline{\mathrm{d}\omega^a{}_b} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\right)_{,c} e^c \wedge e^z - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}\phi_{,c}F^a{}_b e^c \wedge e^z - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_b F_{cd}e^c \wedge e^d. \tag{25}$$

また、

$$
\begin{aligned}
\hat{\omega}^a{}_C \wedge \hat{\omega}^C{}_b =& \hat{\omega}^a{}_c \wedge \hat{\omega}^c{}_b + \hat{\omega}^a{}_z \wedge \hat{\omega}^z{}_b \\
=& \underline{\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}\left(F^c{}_b\omega^a{}_c - F^a{}_c\omega^c{}_b\right) \wedge e^z + \\
& -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_cF_{bd}e^c \wedge e^d - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}\left(F^a{}_c\phi_{,b} - F_{bc}\phi^{,a}\right)e^c \wedge e^z.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

（色付けで項が対応。）これらの結果から、 second Cartan structure equation (61) に代入して $d+1$ 次元の curvature 2-form の ab 成分が次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}^a{}_b =& \mathrm{d}\hat{\omega}^a{}_b + \hat{\omega}^a{}_C \wedge \hat{\omega}^C{}_b \\
=& \underline{\mathcal{R}^a{}_b} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\right)_{,c}e^c \wedge e^z - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}\phi_{,c}F^a{}_be^c \wedge e^z - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_bF_{cd}e^c \wedge e^d + \\
& -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}\left(F^c{}_b\omega^a{}_c - F^a{}_c\omega^c{}_b\right) \wedge e^z - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_cF_{bd}e^c \wedge e^d - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}\left(F^a{}_c\phi_{,b} - F_{bc}\phi^{,a}\right)e^c \wedge e^z.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$g_{\mu\nu}$ と対応する d 次元の $\mathcal{R}^a{}_b$ は下線部の項に (61) を適用して得られる。
もう一方、(22) の exterior derivative は

$$
\mathrm{d}\hat{\omega}^a{}_z = -\phi^{,a}{}_be^b \wedge e^z - \phi^{,a}\,\mathrm{d}e^z - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\right)_{,c}e^c \wedge e^b - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\,\mathrm{d}e^b\,. \tag{28}
$$

(24) で $\mathrm{d}e^z$ を、 (60) で $\mathrm{d}e^b$ を書き換えると、

$$
\mathrm{d}\hat{\omega}^a{}_z = -\left(\phi^{,a}{}_b + \phi^{,a}\phi_{,b}\right)e^b \wedge e^z - \frac{1}{2}\phi^{,a}\mathrm{e}^{\phi}F_{bc}e^b \wedge e^c - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\right)_{,c}e^b \wedge e^c + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\omega^b{}_c \wedge e^c. \tag{29}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
\hat{\omega}^a{}_C \wedge \hat{\omega}^C{}_z =& \hat{\omega}^a{}_b \wedge \hat{\omega}^b{}_z \\
=& -\phi^{,b}\omega^a{}_b \wedge e^z - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}F^b{}_c\omega^a{}_b \wedge e^c + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_bF^b{}_ce^z \wedge e^c.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

(61) に適用すると、

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}^a{}_z =& \mathrm{d}\hat{\omega}^a{}_z + \hat{\omega}^a{}_C \wedge \hat{\omega}^C{}_z \\
=& -\left(\phi^{,a}{}_b + \phi^{,a}\phi_{,b}\right)e^b \wedge e^z - \frac{1}{2}\phi^{,a}\mathrm{e}^{\phi}F_{bc}e^b \wedge e^c - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\right)_{,c}e^b \wedge e^c + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\omega^b{}_c \wedge e^c + \\
& -\phi^{,b}\omega^a{}_b \wedge e^z - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}F^b{}_c\omega^a{}_b \wedge e^c + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_bF^b{}_ce^z \wedge e^c.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

色付けした部分をまとめると

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}^a{}_z =& -\left(\phi^{,a}{}_b + \phi^{,a}\phi_{,b}\right)e^b \wedge e^z - \phi^{,b}\omega^a{}_b \wedge e^z + \\
& -\frac{1}{2}\phi^{,a}\mathrm{e}^{\phi}F_{bc}e^b \wedge e^c - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\phi}F^a{}_b\right)_{,c}e^b \wedge e^c + \\
& -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\phi}\left(F^b{}_c\omega^a{}_b - F^a{}_b\omega^b{}_c\right) \wedge e^c + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_bF^b{}_ce^z \wedge e^c.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

一行目の項は最終的に ϕ の kinetic term になる。
$d+1$ 次元の Riemann tensor は

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}^a{}_b =& \frac{1}{2}\hat{R}^a{}_{bCD}e^C \wedge e^D = \frac{1}{2}\hat{R}^a{}_{bcd}e^c \wedge e^d + \hat{R}^a{}_{bcz}e^c \wedge e^z, \\
\hat{\mathcal{R}}^a{}_z =& \frac{1}{2}\hat{R}^a{}_{zCD}e^C \wedge e^D = \frac{1}{2}\hat{R}^a{}_{zcd}e^c \wedge e^d + \hat{R}^a{}_{zcz}e^c \wedge e^z.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

から読み取ることができる。 (27) を書き直すと

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}^a{}_b =&R^a{}_{bcd}e^c\wedge e^d - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^\phi F^a{}_b\right)_{,c} e^c\wedge e^z - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi \phi_{,c}F^a{}_b e^c\wedge e^z - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_b F_{cd} e^c\wedge e^d + \\ &-\frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\left(F^c{}_b\omega_d{}^a{}_c - F^a{}_c\omega_d{}^c{}_b\right)e^d\wedge e^z - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_{[c|}F_{b|d]}e^c\wedge e^d - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\left(F^a{}_c\phi_{,b} - F_{bc}\phi^{,a}\right)e^c\wedge e^z.\end{aligned} \tag{34}$$

$e^a\wedge e^b$ のような基底を持つ部分は、成分を読み取るために反対称部分だけを残した。よって、

$$\hat{R}^a{}_{bcd} =R^a{}_{bcd} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_bF_{cd} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_{[c|}F_{b|d]}, \tag{35}$$

$$\hat{R}^a{}_{bcz} = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^\phi F^a{}_b\right)_{,c} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\phi_{,c}F^a{}_b - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\left(F^e{}_b\omega_c{}^a{}_e - F^a{}_e\omega_c{}^e{}_b\right) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\left(F^a{}_c\phi_{,b} - F_{bc}\phi^{,a}\right). \tag{36}$$

(36) は次のように書くと ab の反対称性が明確になる。

$$\hat{R}^a{}_{bcz} = -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^\phi F^a{}_b)_{,c} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\phi_{,c}F^a{}_b - \eta_{bd}\mathrm{e}^\phi F^{e[d}\omega_c{}^{a]}{}_e - \eta_{bd}\mathrm{e}^\phi F^{[a}{}_c\phi^{,d]}. \tag{37}$$

次に (32) を書き直すと

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}^a{}_z =& -\left(\phi^{,a}{}_b + \phi^{,a}\phi_{,b}\right)e^b\wedge e^z - \phi^{,b}\omega_c{}^a{}_b e^c\wedge e^z + \\ &-\frac{1}{2}\phi^{,a}\mathrm{e}^\phi F_{cd}e^b\wedge e^c - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^\phi F^a{}_{[b})_{,c]}e^b\wedge e^c + \\ &-\frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\left(F^b{}_{[c}\omega_{d]}{}^a{}_b - F^a{}_b\omega_{[d}{}^b{}_{c]}\right)e^d\wedge e^c + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_bF^b{}_c e^z\wedge e^c.\end{aligned} \tag{38}$$

よって、

$$\hat{R}^a{}_{zcd} = -\phi^{,a}\mathrm{e}^\phi F_{cd} - (\mathrm{e}^\phi F^a{}_{[c})_{,d]} - \mathrm{e}^\phi\left(F^b{}_{[d}\omega_{c]}{}^a{}_b - F^a{}_b\omega_{[c}{}^b{}_{d]}\right), \tag{39}$$

$$\hat{R}^a{}_{zcz} = -\left(\phi^{,a}{}_c + \phi^{,a}\phi_{,c}\right) - \phi^{,b}\omega_c{}^a{}_b - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_bF^b{}_c. \tag{40}$$

これで全ての Riemann tensor の成分が得られた。[*4]

(35) から、まず次を計算する。

$$\begin{aligned}\hat{R}^a{}_{bad} =&R_{bd} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_bF_{ad} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_{[a|}F_{b|d]} \\ =&R_{bd} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^a{}_bF_{ad},\end{aligned} \tag{41}$$

ここで $R_{ab} = R^c{}_{acb}$ は d 次元の Ricci tensor. $d+1$ 次元の Ricci tensor の ab 成分は

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ab} =&\hat{R}^C{}_{aCb} = \hat{R}^c{}_{acb} + \hat{R}^z{}_{azb} \\ =&R_{ab} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^c{}_aF_{cb} - (\phi_{,ab} + \phi_{,a}\phi_{,b}) - \phi^{,c}\omega_{bac} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^{ac}F^c{}_b \\ =&R_{ab} - (\phi_{,ab} + \phi_{,a}\phi_{,b}) - \phi^{,c}\omega_{bac}.\end{aligned} \tag{42}$$

az 成分は (36) をつかって

$$\begin{aligned}\hat{R}_{az} =&\hat{R}^C{}_{aCz} = \hat{R}^c{}_{acz} \\ =& -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^\phi F^c{}_a)_{,c} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\phi_{,c}F^c{}_a - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\left(F^e{}_a\omega_c{}^c{}_e - F^c{}_e\omega_c{}^e{}_a\right) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\left(\cancel{F^c{}_c}\phi_{,a} - F_{ac}\phi^{,c}\right) \\ =& -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^\phi F^c{}_a)_{,c} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\phi_{,c}F^c{}_a - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\left(F^e{}_a\omega_c{}^c{}_e - F^c{}_e\omega_c{}^e{}_a\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\phi^{,c}F_{ac} \\ =& -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^\phi F^c{}_a)_{,c} - \mathrm{e}^\phi\phi_{,c}F^c{}_a - \frac{1}{2}\mathrm{e}^\phi\left(F^e{}_a\omega_c{}^c{}_e - F^c{}_e\omega_c{}^e{}_a\right).\end{aligned} \tag{43}$$

[*4] (39) と (36) は等価なはず。一見してそうは見えない。要チェック。

zz　成分は (40) をつかって、

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{zz} =& \hat{R}^{C}{}_{zCz} = \hat{R}^{c}{}_{zcz} \\
=& -\left(\phi^{,c}{}_{c} + \phi^{,c}\phi_{,c}\right) - \phi^{,b}\omega_{c}{}^{c}{}_{b} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^{c}{}_{b}F^{b}{}_{c}.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

これで全ての Ricci tensor の成分が得られた。

Ricci scalar を計算しよう。実際に使うのは (42) と (44)　のみ。

$$
\begin{aligned}
\hat{R} =& \eta^{AB}\hat{R}_{AB} = \eta^{ab}\hat{R}_{ab} + \hat{R}_{zz} \\
=& R - \left(\phi^{,a}{}_{a} + \phi^{,a}\phi_{,a}\right) - \phi^{,c}\omega_{a}{}^{a}{}_{c} + \\
& - \left(\phi^{,c}{}_{c} + \phi^{,c}\phi_{,c}\right) - \phi^{,b}\omega_{c}{}^{c}{}_{b} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^{c}{}_{b}F^{b}{}_{c} \\
=& R - 2\left(\phi^{,a}{}_{a} + \phi^{,a}\phi_{,a}\right) - 2\phi^{,c}\omega_{a}{}^{a}{}_{c} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^{c}{}_{b}F^{b}{}_{c}.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

スカラー場の項は正しいのか？逆算する。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\phi}\nabla^{2}\mathrm{e}^{\phi} =& \mathrm{e}^{-\phi}\nabla_{\mu}\left(\mathrm{e}^{\phi}\partial^{\mu}\phi\right) \\
=& \partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + \nabla_{\mu}\partial^{\mu}\phi.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

ここでの計算は全て locally flat coordinates で行っていた。 locally flat coordinates　での共変微分は接続が spin connection になる (たぶん)。

$$
\nabla_{b}v^{a} = \partial_{b}v^{a} + \omega_{b}{}^{a}{}_{c}v^{c}
\tag{47}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\phi}\nabla^{2}\mathrm{e}^{\phi} =& \partial_{a}\phi\partial^{a}\phi + \partial_{a}\partial^{a}\phi + \omega_{a}{}^{a}{}_{c}\partial^{c}\phi \\
=& \phi^{,a}\phi_{,a} + \phi^{,a}{}_{a} + \omega_{a}{}^{a}{}_{c}\phi^{,c}.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

これを信じるなら (45) は、

$$
\hat{R} = R - 2\mathrm{e}^{-\phi}\nabla^{2}\mathrm{e}^{\phi} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\phi}F^{c}{}_{b}F^{b}{}_{c}.
\tag{49}
$$

確かに (19) が得られた。そして、導出の過程で次元は限定しなかったのでこの式は次元によらない。

2.2 Canonical choice

String の文脈では dimensional reduction の後にスカラー場の kinetic term が canonical normalization になっていて欲しい。その場合、次の特別な α, β を選ぶ必要がある。[6]

$$
\alpha^{2} = \frac{1}{2(d-1)(d-2)}, \quad \beta = -(d-2)\alpha.
\tag{50}
$$

この場合の結果は、

$$
\hat{R} = \mathrm{e}^{-2\alpha\phi}\left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^{2} + (d-3)\alpha\partial^{2}\phi\right) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2d\alpha\phi}F^{2}.
\tag{51}
$$

で確かに係数は $-1/2$になる。全微分項は作用の中では無視できる。この公式は他の文献[5]でも比較的よく見られる。教科書だと [3, p.343]. $d = 2$ で破綻するが、そこまで落とすことは string ではしないので問題ない。

2.3 General case

超面倒なのでやりません。

3 An example

radius L を持つAdS_{d+1} の metric は

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = L^2 \frac{-\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2 + \sum_{i=1}^{d-1} \mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^i}{z^2}. \tag{52}$$

その Ricci scalar は定数で、[2, p.73]

$$\hat{R} = -\frac{d(d+1)}{L^2}. \tag{53}$$

metric は z にしか依存していないので、x^{d-1} 方向を分離することにする。

$$\mathrm{d}\hat{s}^2 = L^2 \frac{-\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2 + \sum_{i=1}^{d-2} \mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^i}{z^2} + \frac{L^2}{z^2}(\mathrm{d}x^{d-1})^2. \tag{54}$$

(18) に当てはめると、

$$\mathrm{d}s^2 = L^2 \frac{-\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2 + \sum_{i=1}^{d-2} \mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^i}{z^2}, \tag{55}$$

$$\mathrm{e}^{\phi} = \frac{L}{z}, \quad A = 0. \tag{56}$$

特にこの場合、 $g_{\mu\nu}$ はたんに AdS_d の metric となるので、

$$R = -\frac{d(d-1)}{L^2}. \tag{57}$$

また、

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\phi}\nabla^2\mathrm{e}^{\phi} &= \mathrm{e}^{-\phi}\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}g^{ab}(\mathrm{e}^{\phi})_{,b})_{,a} \\ &= \frac{z}{L}\frac{z^d}{L^d}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{L^d}{z^d}\frac{z^2}{L^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{L}{z}\right) = \frac{d}{L^2}.\end{aligned} \tag{58}$$

よって、(49) の右辺を計算すると、

$$R - 2\mathrm{e}^{-\phi}\nabla^2\mathrm{e}^{\phi} = -\frac{d(d-1)}{L^2} - \frac{2d}{L^2} = -\frac{d(d+1)}{L^2}. \tag{59}$$

確かに $\hat{R}$ に一致した。

A Cartan structure equations

The first / second Cartan structure equations:

$$\mathcal{T}^a = \mathrm{d}e^a + \omega^a{}_b \wedge e^b, \tag{60}$$

$$\mathcal{R}^\mu{}_\sigma = \mathrm{d}\omega^\mu{}_\sigma + \omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu{}_\sigma. \tag{61}$$

curvature / torsion tensor は curvature 2-form / torsion 2-form の成分。

$$\mathcal{T}^a = \frac{1}{2}\Theta^a{}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu\,, \tag{62}$$

$$\mathcal{R}^\mu{}_\sigma = \frac{1}{2}R^\mu{}_{\sigma\rho\lambda}\,\mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\lambda \tag{63}$$

connection 1-form の成分が spin connection （または Ricci rotation coefficients). 普通、一番左 (または一番右) の添字が 1-form の添字に対応する。

$$\omega^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b \, \mathrm{d}x^\mu = \omega_c{}^a{}_b e^c. \tag{64}$$

compatible condition $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ から 1-form の添字以外の 2 つは反対称であることが言える: $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$.

B　微分形式

[2, p.58] や [4, p.196]　などを参照。 $\omega^{(p)} \in \Lambda^{(p)}$ は p-form とする。座標成分

$$\omega^{(p)} = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_p} \, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p} \,. \tag{65}$$

交換法則は

$$\omega^{(p)} \wedge \omega^{(q)} = (-1)^{pq} \omega^{(q)} \wedge \omega^{(p)}. \tag{66}$$

外微分、

$$\mathrm{d}\omega^{(p)} = \frac{1}{p!} \partial_\mu \omega_{\mu_1 \cdots \mu_p} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \cdots \mathrm{d}x^{\mu_p} \,. \tag{67}$$

外微分の分配則、

$$\mathrm{d}\left(\omega^{(p)} \wedge \omega^{(q)}\right) = \mathrm{d}\omega^{(p)} \wedge \omega^{(q)} + (-1)^p \omega^{(p)} \wedge \mathrm{d}\omega^{(q)} \,. \tag{68}$$

C　多脚場

[2, §2.1.3(p.53)] [1, §3.4b(p.49)] などを参照。多脚場 vielbein は

$$\eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu = g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_a{}^\nu = \eta_{ab}, \tag{69}$$

を満たす。[*5] また、 (co-)vielbein basis を 1-form $e^a = e^a{}_\mu \, \mathrm{d}x^\mu$ で与えると、

$$\eta_{ab} e^a e^b = \eta_{ab} e_\mu{}^a e^b_\nu \, \mathrm{d}x^\mu \, \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu} \, \mathrm{d}x^\mu \, \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}s^2 \tag{70}$$

と書ける。定義式から、

$$e^a{}_\mu = \eta^{ab} e_b{}^\nu g_{\mu\nu}, \tag{71}$$

で関係づく。（通常の添字の上げ下げと同じ。）

e^a の dual basis は $e_a = e_a{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ である。実際、

$$e_a(e^b) = e_a{}^\mu e^b{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathrm{d}x^\nu) = e_a{}^\mu e^b{}_\mu = \delta_a{}^b, \tag{72}$$

となる。ここで座標基底 $\mathrm{d}x^\mu$ とその双対基底 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ について

$$\mathrm{d}x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\mathrm{d}x^\mu\right) = \delta^\mu{}_\nu, \tag{73}$$

を使った。

e_a が vielbein basis, e^a が co-vielbein basis と呼ばれている模様。[2, p.53] [1, p.49] 対応して $e_a{}^\mu$ 　が vielbein, $e^a{}_\mu$ が inverse vielbein になる。ただ、このノートでは区別して呼んでいない。

---

*5 添字の順番は任意だが、左側が a の方が vielbein basis の成分として自然な表記になる。区別しない場合もある。

D　逆行列との対応

ブロック行列の逆行列。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D_C A^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(DCA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (DCA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{74}$$

D　が正則な場合。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(DCA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (DCA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{75}$$

これを (2) に適用すると、(A が被ってしまったが、以下右辺の A はベクトル場とする。) まず

$$A - BD^{-1}C = \mathrm{e}^{2\alpha\phi}g + \mathrm{e}^{2\beta\phi}AA^T - \mathrm{e}^{2\beta\phi}A\mathrm{e}^{-2\beta\phi}\mathrm{e}^{2\beta\phi}A^T = e^{2\alpha\phi}g \tag{76}$$

($A^Tg^{-1}A$ がスカラー積　$A_\mu g^{\mu\nu}A_\nu$、 AA^T がテンソル積 $A_\mu A_\nu$ とする。) よって、

$$(\hat{g}^{\mu\nu}) = (A - BD^{-1}C)^{-1} = e^{-2\alpha\phi}g^{-1}. \tag{77}$$

また、

$$\begin{aligned} A^{-1}B &= \left(\mathrm{e}^{2\alpha\phi}g + \mathrm{e}^{2\beta\phi}AA^T\right)^{-1}\mathrm{e}^{2\beta\phi}A \\ &= \mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}\left(I + \mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}g^{-1}AA^T\right)^{-1}g^{-1}A \\ &= \mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}\sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}g^{-1}AA^T)^k g^{-1}A \\ &= \mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}g^{-1}A\sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}A^Tg^{-1}A)^k \end{aligned} \tag{78}$$

$A^Tg^{-1}A = A^\mu A_\mu = A^2$ はスカラーなので、次のように書ける。

$$A^{-1}B = \frac{\mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}}{1 + \mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}A^2}g^{-1}A \tag{79}$$

これをつかうと、

$$\begin{aligned} (\hat{g}^{zz}) = (DCA^{-1}B)^{-1} &= \left[e^{2\beta\phi}e^{2\beta\phi}A^T\frac{\mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}}{(1 + \mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}A^2)}g^{-1}A\right]^{-1} \\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^{2(3\beta-\alpha)\phi}A^2}{(1 + \mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}A^2)}\right]^{-1} \\ &= \mathrm{e}^{-2(3\beta-\alpha)\phi}A^{-2}(1 + \mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}A^2). \end{aligned} \tag{80}$$

また、

$$\begin{aligned} (\hat{g}^{z\mu}) = -A^{-1}B(DCA^{-1}B)^{-1} &= -\mathrm{e}^{-2(3\beta-\alpha)\phi}A^{-2}(1 + \mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}A^2)\frac{\mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}}{(1 + \mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\phi}A^2)}g^{-1}A \\ &= -A^{-2}\mathrm{e}^{-2\beta\phi}g^{-1}A. \end{aligned} \tag{81}$$

参考 [8].

References

[1] Wald, "General Relativity," The University of Chicago Press, 1984
[2] M. Ammon, J. Erdmenger, "Gauge/Gravity Duality," Cambridge, 2015
[3] P. West, "Introduction to Strings and Branes," Cambridge, 2012
[4] M. Nakahara, "Geometry, Topology, and Physics," Second edition, Taylor & Francis, 2003
[5] R. Goranci, https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:812159/FULLTEXT01.pdf
[6] https://people.tamu.edu/ c-pope/ihplec.pdf
[7] https://physics.stackexchange.com/questions/555797/spin-connection-curvature
[8] https://physics.stackexchange.com/questions/555591/kaluza-klein-metric-and-ricci-scalar